2024年高考全国甲卷数学理科

单项选择题

1. 设$z=5+i$，则$i(\bar{z}+z)=$（　）

A. $10i$　　B. $2i$

C. 10　　D. -2

2. 集合$A=\{1,2,3,4,5,9\},B=\{x|\sqrt{x}\in A\}$，则$\complement_A(A\cap B)=$（　）

A. $\{1,4,9\}$　　B. $\{3,4,9\}$

C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{2,3,5\}$

3. 若实数x,y满足约束条件

$$\begin{cases}4x-3y-3\geq 0\\ x-2y-2\leq 0\\ 2x+6y-9\leq 0\end{cases},$$

则$z=x-5y$的最小值为（　）

A. 5　　B. $\frac{1}{2}$

C. -2　　D. $-\frac{7}{2}$

4. 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$S_5=S_{10}$，$a_5=1$，则$a_1=$（　）

A. -2　　B. $\frac{7}{3}$

C. 1　　D. 2

5. 已知双曲线$C:\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的上、下焦点分别为$F_1(0,4),F_2(0,-4)$，点$P(-6,4)$在该双曲线上，则该双曲线的离心率为（　）

A. 4　　B. 3

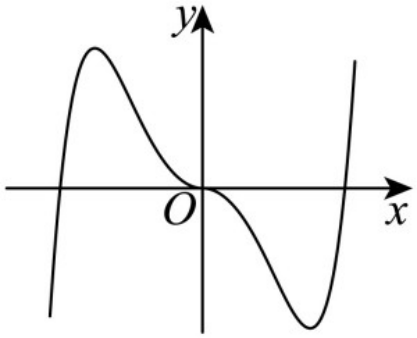
C. 2　　D. $\sqrt{2}$

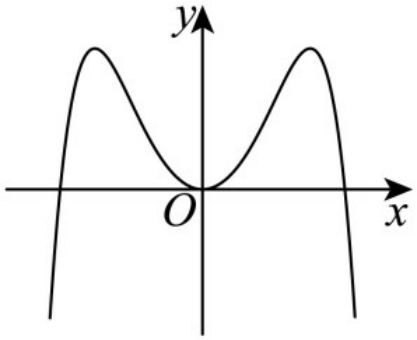
6. 设函数$f(x)=\frac{e^x+2\sin x}{1+x^2}$，则曲线$y=f(x)$在$(0,1)$处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为（　）

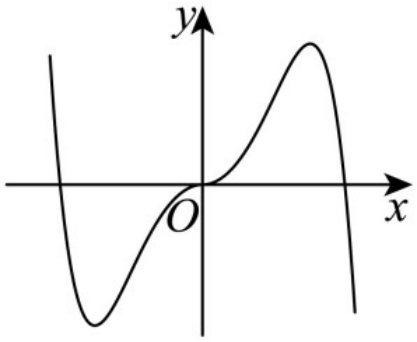
A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$

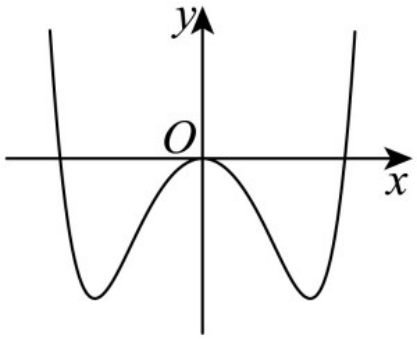
C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

7. 函数$f(x)=-x^2+(e^x-e^{-x})\sin x$在区间$[-2.8,2.8]$的大致图像为（　）

A. 

B. 

C. 

D. 

8. 已知$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，则$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=$（　）

A. $2\sqrt{3}+1$　　B. $2\sqrt{3}-1$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $1-\sqrt{3}$

9. 已知向量$\vec{a}=(x+1,x),\vec{b}=(x,2)$，则（　）

A. “$x=-3$”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的必要条件

B. “$x=-3$”是“$\vec{a}\parallel\vec{b}$”的必要条件

C. “$x=0$”是“$\vec{a}\perp\vec{b}$”的充分条件

D. “$x=-1+\sqrt{3}$”是“$\vec{a}\parallel\vec{b}$”的充分条件

10. 设α、β是两个平面，m、n是两条直线，且$\alpha\cap\beta=m$. 下列四个命题：

① 若$m\parallel n$，则$n\parallel\alpha$或$n\parallel\beta$

② 若$m\perp n$，则$n\perp\alpha,n\perp\beta$

③ 若$n\parallel\alpha$，且$n\parallel\beta$，则$m\parallel n$

④ 若n与α和β所成的角相等，

则$m\perp n$其中所有真命题的编号是（　）

A. ①③　　B. ②④

C. ①②③　　D. ①③④

11. 在$\triangle ABC$中内角A,B,C所对边分别为a,b,c，若$B=\frac{\pi}{3}$，$b^2=\frac{9}{4}ac$，

则$\sin A+\sin C=$（　）

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. 已知b是a,c的等差中项，直线$ax+by+c=0$与圆$x^2+y^2+4y-1=0$交于A,B两点，

则$|AB|$的最小值为（　）

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. $2\sqrt{5}$

填空题

13. $\left(\frac{1}{3}+x\right)^{10}$的展开式中，各项系数的最大值是_____.

14. 已知甲、乙两个圆台上、下底面的半径均为r_1和r_2，母线长分别为$2(r_2-r_1)$和$3(r_2-r_1)$，则两个圆台的体积之比$\frac{V_{甲}}{V_{乙}}=$_____.

15. 已知$a>1$，$\frac{1}{\log_8 a}-\frac{1}{\log_a 4}=-\frac{5}{2}$，则$a=$_____.

16. 有6个相同的球，分别标有数字1、2、3、4、5、6，从中不放回地随机抽取3次，每次取1个球. 记m为前两次取出的球上数字的平均值，n为取出的三个球上数字的平均值，则m与n差的绝对值不超过$\frac{1}{2}$的概率是_____.

解答题

17. 某工厂进行生产线智能化升级改造，升级改造后，从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取150件进行检验，数据如下：

	优级品	合格品	不合格品	总计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总计	96	52	2	150

（1）填写如下列联表：

	优级品	非优级品
甲车间		
乙车间		

能否有95%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？能否有99%的把握认为甲，乙两车间产品的优级品率存在差异？

（2）已知升级改造前该工厂产品的优级品率$p=0.5$，设$\bar{p}$为升级改造后抽取的n件产品的优级品率. 如果$\bar{p}>p+1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$，则认为该工厂产品的优级品率提高了，根据抽取的150件产品的数据，能否认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了？（$\sqrt{150}\approx12.247$）附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

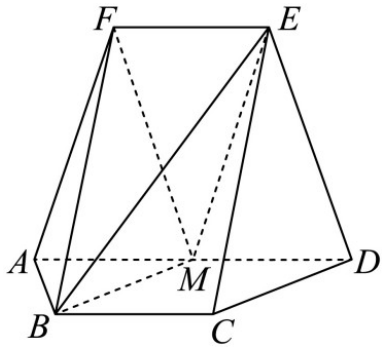
$P(K^2\geq k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18. 记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，且$4S_n=3a_n+4$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设$b_n=(-1)^{n-1}na_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n.

19. 如图，在以A，B，C，D，E，F为顶点的五面体中，四边形$ABCD$与四边形$ADEF$均为等腰梯形，$BC\parallel AD,EF\parallel AD$，$AD=4,AB=BC=EF=2$，$ED=\sqrt{10},FB=2\sqrt{3}$，$M$为$AD$的中点.



（1）证明：$BM\parallel$平面CDE；

（2）求二面角$F-BM-E$的正弦值.

20. 设椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为$F$，点$M(1,\frac{3}{2})$在$C$上，且$MF\perp x$轴.

（1）求C的方程；

（2）过点$P(4,0)$的直线与C交于A,B两点，N为线段FP的中点，直线NB交直线MF于点Q，证明：$AQ\perp y$轴.

21. 已知函数$f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$.

（1）当$a=-2$时，求$f(x)$的极值；

（2）当$x\geq 0$时，$f(x)\geq 0$恒成立，求a的取值范围.

坐标系与参数方程

22. 在平面直角坐标系xOy中，以坐标原点O为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线C的极坐标方程为$\rho=\rho\cos\theta+1$.

（1）写出C的直角坐标方程；

（2）设直线l：

$$\begin{cases} x=t \\ y=t+a \end{cases}$$

（t为参数），若C与l相交于A、B两点，若$|AB|=2$，求a的值.

不等式选讲

23. 实数a,b满足$a+b\geq 3$.

（1）证明：$2a^2+2b^2>a+b$；

（2）证明：$|a-2b^2|+|b-2a^2|\geq 6$.