2024北京高考数学

单项选择题

1. 已知集合$M=\{x|-4<x\leq 1\}$，$N=\{x|-1<x<3\}$，则$M\cup N=$（　）

A. $\{x|-4<x<3\}$　　B. $\{x|-1<x\leq 1\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{x|-1<x<4\}$

2. 已知$\frac{z}{i}=i-1$，则$z=$（　）.

A. $1-i$　　B. $-i$

C. $-1-i$　　D. 1

3. 求圆$x^2+y^2-2x+6y=0$的圆心到$x-y+2=0$的距离（　）

A. $2\sqrt{3}$　　B. 2

C. $3\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{6}$

4. $(x-\sqrt{x})^4$的二项展开式中x^3的系数为（　）

A. 15　　B. 6

C. -4　　D. -13

5. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，则“$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$”是“$\vec{a}=\vec{b}$或$\vec{a}=-\vec{b}$”的（　）条件.

A. 必要而不充分条件　　B. 充分而不必要条件

C. 充分且必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 已知$f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$，$f(x_1)=-1$，$f(x_2)=1$，$|x_1-x_2|_{min}=\frac{\pi}{2}$，

则$\omega=$（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7. 记水的质量为$d=\frac{S-1}{\ln n}$，并且d越大，水质量越好．若S不变，且$d_1=2.1$，$d_2=2.2$，则n_1与n_2的关系为（　）

A. $n_1<n_2$

B. $n_1>n_2$

C. 若$S<1$，则$n_1<n_2$；若$S>1$，则$n_1>n_2$；

D. 若$S<1$，则$n_1>n_2$；若$S>1$，则$n_1<n_2$；

8. 已知以边长为4的正方形为底面的四棱锥，四条侧棱分别为4，4，$2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}$，则该四棱锥的高为（　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $2\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

9. 已知(x_1,y_1)，(x_2,y_2)是函数$y=2^x$图象上不同的两点，则下列正确的是（　）

A. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\frac{x_1+x_2}{2}$

B. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}$

C. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$

D. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$

10. 若集合$\{(x,y)\,|\,y=x+t(x^2-x),0\le t\le 1,1\le x\le 2\}$表示的图形中，两点间最大距离为$d$、面积为$S$，则（　）

A. $d=3$，$S<1$

B. $d=3$，$S>1$

C. $d=\sqrt{10}$，$S<1$

D. $d=\sqrt{10}$，$S>1$

填空题

11. 已知抛物线$y^2=16x$，则焦点坐标为_____.

12. 已知$\alpha \in [\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，且$\alpha$与$\beta$的终边关于原点对称，则$\cos\beta$的最大值为_____.

13. 已知双曲线$\frac{x^2}{4}-y^2=1$，则过$(3,0)$且和双曲线只有一个交点的直线的斜率为_____.

14. 已知三个圆柱的体积为公比为10的等比数列．第一个圆柱的直径为65mm，第二、三个圆柱的直径为325mm，第三个圆柱的高为230mm，求前两个圆柱的高度分别为_____.

15. 已知$M=\{k|a_k=b_k\}$，a_n，b_n不为常数列且各项均不相同，下列正确的是____.

①a_n，b_n均为等差数列，则M中最多一个元素；

②a_n，b_n均为等比数列，则M中最多三个元素；

③a_n为等差数列，b_n为等比数列，则M中最多三个元素；

④a_n单调递增，b_n单调递减，则M中最多一个元素.

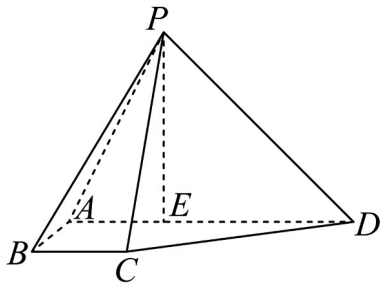
解答题

16. 在$\triangle ABC$中，$a=7$，A为钝角，$\sin 2B=\frac{\sqrt{3}}{7}b\cos B$.

（1）求$\angle A$；

（2）从条件①、条件②和条件③这三个条件中选择一个作为已知，求$\triangle ABC$的面积．①$b=7$；②$\cos B=\frac{13}{14}$；③$c\sin A=\frac{5}{2}\sqrt{3}$.

17. 已知四棱锥$P-ABCD$，$AD\parallel BC$，$AB=BC=1$，$AD=3$，$DE=PE=2$，E是AD上一点，$PE\perp AD$.



（1）若F是PE中点，证明：$BF\parallel$平面PCD.

（2）若$AB\perp$平面PED，求平面PAB与平面PCD夹角的余弦值.

18. 某保险公司为了了解该公司某种保险产品的索赔情况，从合同险期限届满的保单中随机抽取1000份，记录并整理这些保单的索赔情况，获得数据如下表：

赔偿次数	0	1	2	3	4
单数	800	100	60	30	10

假设：一份保单的保费为0.4万元；前3次索赔时，保险公司每次赔偿0.8万元；第四次索赔时，保险公司赔偿0.6万元．假设不同保单的索赔次数相互独立．用频率估计概率．

（1） 估计一份保单索赔次数不少于2的概率；

（2） 一份保单的毛利润定义为这份保单的保费与赔偿总金额之差．

（i） 记X为一份保单的毛利润，估计X的数学期望$E(X)$；

（ii） 如果无索赔的保单的保费减少4%，有索赔的保单的保费增加20%，试比较这种情况下一份保单毛利润的数学期望估计值与（i）中$E(X)$估计值的大小．（结论不要求证明）

19. 已知椭圆方程C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，焦点和短轴端点构成边长为2的正方形，过$(0,t)(t>\sqrt{2})$的直线$l$与椭圆交于$A$，$B$，$C(0,1)$，连接$AC$交椭圆于$D$.

（1）求椭圆方程和离心率；

（2）若直线BD的斜率为0，求t.

20. 已知$f(x)=x+k\ln(1+x)$在$(t,f(t))(t>0)$处切线为l.

（1）若切线l的斜率$k=-1$，求$f(x)$单调区间；

（2）证明：切线l不经过$(0,0)$；

（3）已知$k=1$，$A(t,f(t))$，$C(0,f(t))$，$O(0,0)$，其中$t>0$，切线l与y轴交于点B时．当$2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$，符合条件的$A$的个数为？（参考数据：$1.09<\ln 3<1.10$，$1.60<\ln 5<1.61$，$1.94<\ln 7<1.95$）

21. 设集合$M=\{(i,j,s,t)|i\in\{1,2\},j\in\{3,4\},s\in\{5,6\},t\in\{7,8\},2|(i+j+s+t)\}$．对于给定有穷数列$A:\{a_n\}(1\le n\le 8)$，及序列$\Omega:\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_s$，$\omega_k=(i_k,j_k,s_k,t_k)\in M$，定义变换$T$：将数列$A$的第$i_1,j_1,s_1,t_1$项加1，得到数列$T_1(A)$；将数列$T_1(A)$的第$i_2,j_2,s_2,t_2$列加1，得到数列$T_2T_1(A)\cdots$；重复上述操作，得到数列$T_s\ldots T_2T_1(A)$，记为$\Omega(A)$.

（1）给定数列$A:1,3,2,4,6,3,1,9$和序列$\Omega:(1,3,5,7),(2,4,6,8),(1,3,5,7)$，写出$\Omega(A)$；

（2）是否存在序列Ω，使得$\Omega(A)$为$a_1+2,a_2+6,a_3+4,a_4+2,a_5+8,a_6+2,a_7+4,a_8+4$，若存在，写出一个符合条件的$\Omega$；若不存在，请说明理由；

（3）若数列A的各项均为正整数，且$a_1+a_3+a_5+a_7$为偶数，证明：“存在序列Ω，使得$\Omega(A)$为常数列”的充要条件为“$a_1+a_2=a_3+a_4=a_5+a_6=a_7+a_8$”．