2023年高考全国甲卷数学理科

选择题

1. 设集合$A=\{x|x=3k+1,k\in Z\}$,$B=\{x|x=3k+2,k\in Z\}$，U为整数集，$\complement_U(A\cup B)$=（　）

A. $\{x|x=3k,k\in Z\}$

B. $\{x|x=3k-1,k\in Z\}$

C. $\{x|x=3k-2,k\in Z\}$

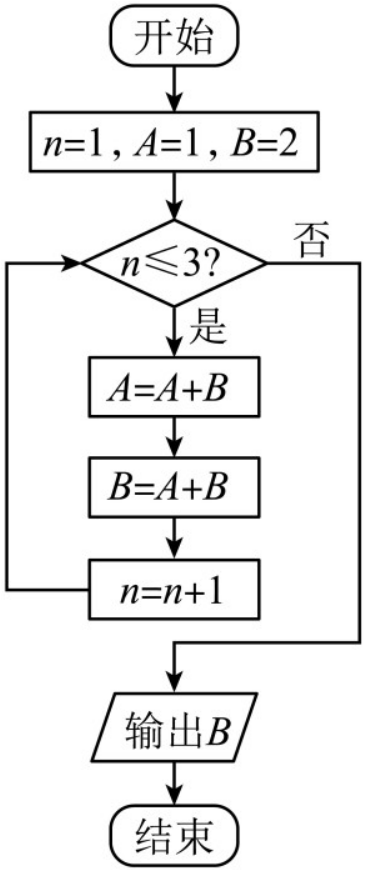
D. $\varnothing$

2. 若复数$(a+i)(1-ai)=2,a\in R$，则$a=$（　）

A. -1　　B. 0

C. 1　　D. 2

3. 执行下面的程序框遇，输出的$B=$（　）



A. 21　　B. 34　　C. 55　　D. 89

4. 向量$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,|\vec{c}|=\sqrt{2}$，且$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则$\cos\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\rangle=$（　）

A. $-\frac{1}{5}$　　B. $-\frac{2}{5}$

C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{4}{5}$

5. 已知正项等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，S_n为$\{a_n\}$前n项和，$S_5=5S_3-4$，则$S_4=$（　）

A. 7　　B. 9　　C. 15　　D. 30

6. 有50人报名足球俱乐部，60人报名乒乓球俱乐部，70人报名足球或乒乓球俱乐部，若已知某人报足球俱乐部，则其报乒乓球俱乐部的概率为（　）

A. 0.8　　B. 0.4　　C. 0.2　　D. 0.1

7. “$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$”是“$\sin\alpha+\cos\beta=0$”的（　）

A. 充分条件但不是必要条件

B. 必要条件但不是充分条件

C. 充要条件

D. 既不是充分条件也不是必要条件

8. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{5}$，其中一条渐近线与圆$(x-2)^2+(y-3)^2=1$交于$A$，$B$两点，则$|AB|=$（　）

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

C. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

9. 有五名志愿者参加社区服务，共服务星期六、星期天两天，每天从中任选两人参加服务，则恰有1人连续参加两天服务的选择种数为（　）

A. 120　　B. 60　　C. 40　　D. 30

10. 已知$f(x)$为函数$y=\cos(2x+\frac{\pi}{6})$向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位所得函数，则$y=f(x)$与$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的交点个数为（　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. 在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形，$AB=4,PC=PD=3,\angle PCA=45°$，则$\triangle PBC$的面积为（　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$

C. $4\sqrt{2}$　　D. $5\sqrt{2}$

12. 已知椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$，$F_1,F_2$为两个焦点，$O$为原点，$P$为椭圆上一点，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，则$|PO|=$（　）

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{30}}{2}$

C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{35}}{2}$

填空题

13. 若$y=(x-1)^2+ax+\sin(x+\frac{\pi}{2})$为偶函数，则$a=$_____.

14. 设x，y满足约束条件

$$\begin{cases}-2x+3y\le 3\\ 3x-2y\le 3\\ x+y\ge 1\end{cases},$$

设$z=3x+2y$，则z的最大值为_____.

15. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E，F分别为CD，A_1B_1的中点，则以EF为直径的球面与正方体每条棱的交点总数为_____.

16. 在$\triangle ABC$中，$AB=2$，$\angle BAC=60°,BC=\sqrt{6}$，$D$为$BC$上一点，$AD$为$\angle BAC$的平分线，则$AD=$_____.

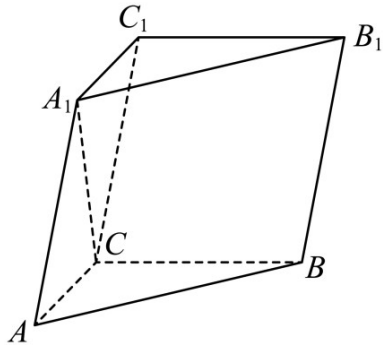
解答题

17. 已知数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，设S_n为$\{a_n\}$前n项和，$2S_n=na_n$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{\frac{a_n+1}{2^n}\}$的前n项和T_n.

18. 在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1=2$，$A_1C\perp$底面ABC，$\angle ACB=90°$，A_1到平面BCC_1B_1的距离为1.



（1）求证：$AC=A_1C$；

（2）若直线AA_1与BB_1距离为2，求AB_1与平面BCC_1B_1所成角的正弦值.

19. 为探究某药物对小鼠的生长抑制作用，将40只小鼠均分为两组，分别为对照组（不加药物）和实验组（加药物）.

（1） 设其中两只小鼠中对照组小鼠数目为X，求X的分布列和数学期望；

（2） 测得40只小鼠体重如下（单位：g）：（已按从小到大排好）对照组：17.3 18.4 20.1 20.4 21.5 23.2 24.6 24.8 25.0 25.4

26.1 26.3 26.4 26.5 26.8 27.0 27.4 27.5 27.6 28.3

实验组：5.4 6.6 6.8 6.9 7.8 8.2 9.4 10.0 10.4 11.2

14.4 17.3 19.2 20.2 23.6 23.8 24.5 25.1 25.2 26.0

（i） 求40只小鼠体重的中位数m，并完成下面2×2列联表：

	$<m$	$\geq m$
对照组		
实验组		

（ii） 根据2×2列联表，能否有95%的把握认为药物对小鼠生长有抑制作用．参考数据：

$P(k^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.010
k_0	2.706	3.841	6.635

20. 已知直线$x-2y+1=0$与抛物线$C:y^2=2px(p>0)$交于A,B两点，且$|AB|=4\sqrt{15}$.

（1）求p；

（2）设C的焦点为F，M，N为C上两点，$\vec{MF}\cdot\vec{NF}=0$，求$\triangle MNF$面积的最小值.

21. 已知$f(x)=ax-\frac{\sin x}{\cos^3 x},x\in(0,\frac{\pi}{2})$

（1）若$a=8$，讨论$f(x)$的单调性；

（2）若$f(x)<\sin 2x$恒成立，求a的取值范围.

22. 已知$P(2,1)$，直线

$$l:\begin{cases}x=2+t\cos\alpha\\y=1+t\sin\alpha\end{cases}$$

（t为参数），α为l的倾斜角，l与x轴，y轴正半轴交于A，B两点，$|PA|\cdot|PB|=4$.

（1）求α的值；

（2）以原点为极点，x轴正半轴为极轴建立极坐标系，求l的极坐标方程.

23. 已知$f(x)=2|x-a|-a,a>0$.

（1）求不等式$f(x)<x$的解集；

（2）若曲线$y=f(x)$与坐标轴所围成的图形的面积为2，求a.