2023北京高考数学

单项选择题

1. 已知集合$M=\{x|x+2\geq 0\},N=\{x|x-1<0\}$，则$M\cap N=$（　）

A. $\{x|-2\leq x<1\}$

B. $\{x|-2<x\leq 1\}$

C. $\{x|x\geq -2\}$

D. $\{x|x<1\}$

2. 在复平面内，复数z对应的点的坐标是$(-1,\sqrt{3})$，则z的共轭复数$\bar{z}=$（　）

A. $1+\sqrt{3}i$　　B. $1-\sqrt{3}i$

C. $-1+\sqrt{3}i$　　D. $-1-\sqrt{3}i$

3. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\vec{a}+\vec{b}=(2,3),\vec{a}-\vec{b}=(-2,1)$，则$|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=$（　）

A. -2　　B. -1

C. 0　　D. 1

4. 下列函数中，在区间$(0,+\infty)$上单调递增的是（　）

A. $f(x)=-\ln x$　　B. $f(x)=\frac{1}{2^x}$

C. $f(x)=-\frac{1}{x}$　　D. $f(x)=3^{|x-1|}$

5. $(2x-\frac{1}{x})^5$的展开式中x的系数为（　）.

A. -80　　B. -40

C. 40　　D. 80

6. 已知抛物线$C:y^2=8x$的焦点为F，点M在C上．若M到直线$x=-3$的距离为5，则$|MF|=$（　）

A. 7　　B. 6　　C. 5　　D. 4

7. 在$\triangle ABC$中，$(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$，则$\angle C=$（　）

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

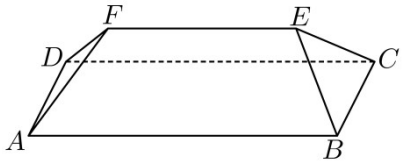
C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

8. 若$xy\neq 0$，则“$x+y=0$”是“$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=-2$”的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9. 坡屋顶是我国传统建筑造型之一，蕴含着丰富的数学元素．安装灯带可以勾勒出建筑轮廓，展现造型之美．如图，某坡屋顶可视为一个五面体，其中两个面是全等的等腰梯形，两个面是全等的等腰三角形．若$AB=25m, BC=AD=10m$，且等腰梯形所在的平面、等腰三角形所在的平面与平面$ABCD$的夹角的正切值均为$\frac{\sqrt{14}}{5}$，则该五面体的所有棱长之和为（　）



A. $102m$　　B. $112m$

C. $117m$　　D. $125m$

10. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{1}{4}(a_n-6)^3+6(n=1,2,3,\cdots)$，则（　）

A. 当$a_1=3$时，$\{a_n\}$为递减数列，且存在常数$M\leq 0$，使得$a_n>M$恒成立

B. 当$a_1=5$时，$\{a_n\}$为递增数列，且存在常数$M\leq 6$，使得$a_n<M$恒成立

C. 当$a_1=7$时，$\{a_n\}$为递减数列，且存在常数$M>6$，使得$a_n>M$恒成立

D. 当$a_1=9$时，$\{a_n\}$为递增数列，且存在常数$M>0$，使得$a_n<M$恒成立

填空题

11. 已知函数$f(x)=4^x+\log_2 x$，则$f(\frac{1}{2})=$_____.

12. 已知双曲线 C 的焦点为 $(-2,0)$ 和 $(2,0)$，离心率为 $\sqrt{2}$，则 C 的方程为_____.

13. 已知命题 p:若 α,β 为第一象限角，且 $\alpha>\beta$，则 $\tan\alpha>\tan\beta$．能说明 p 为假命题的一组 α,β 的值为 $\alpha=$_____，$\beta=$ _____.

14. 我国度量衡的发展有着悠久的历史，战国时期就已经出现了类似于砝码的、用来测量物体质量的“环权”．已知 9 枚环权的质量（单位：铢）从小到大构成项数为 9 的数列 $\{a_n\}$，该数列的前 3 项成等差数列，后 7 项成等比数列，且 $a_1=1,a_5=12,a_9=192$，则 $a_7=$_____；数列 $\{a_n\}$ 所有项的和为_____.

15. 设 $a>0$，函数

$$f(x)=\begin{cases} x+2, x<-a, \\ \sqrt{a^2-x^2}, -a\le x\le a,, \\ -\sqrt{x}-1, x>a. \end{cases}$$

给出下列四个结论：

① $f(x)$ 在区间 $(a-1,+\infty)$ 上单调递减；

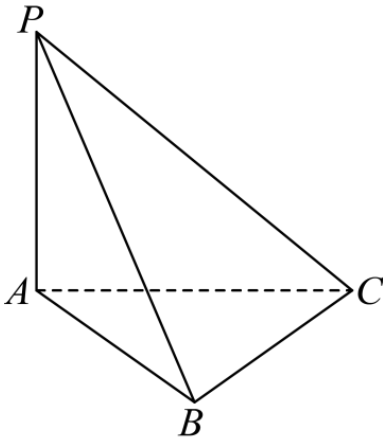
② 当 $a\ge 1$ 时，$f(x)$ 存在最大值；

③ 设 $M(x_1,f(x_1))(x_1\le a),N(x_2,f(x_2))(x_2>a)$，则 $|MN|>1$；

④ 设 $P(x_3,f(x_3))(x_3<-a),Q(x_4,f(x_4))(x_4\ge -a)$．若 $|PQ|$ 存在最小值，则 a 的取值范围是 $(0,\frac{1}{2}]$．其中所有正确结论的序号是_____.

解答题

16. 如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA\perp$ 平面 ABC，$PA=AB=BC=1$，$PC=\sqrt{3}$.



（1）求证：$BC\perp$ 平面 PAB;

（2）求二面角 $A-PC-B$ 的大小.

17. 设函数$f(x)=\sin\omega x\cos\varphi+\cos\omega x\sin\varphi(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$.

（1）若$f(0)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，求φ的值.

（2）已知$f(x)$在区间$[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$上单调递增，$f(\frac{2\pi}{3})=1$，再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知，使函数$f(x)$存在，求ω,φ的值．条件①：$f(\frac{\pi}{3})=\sqrt{2}$；条件②：$f(-\frac{\pi}{3})=-1$；条件③：$f(x)$在区间$[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}]$上单调递减.

18. 为研究某种农产品价格变化的规律，收集得到了该农产品连续40天的价格变化数据，如下表所示．在描述价格变化时，用“+”表示“上涨”，即当天价格比前一天价格高；用“-”表示“下跌”，即当天价格比前一天价格低；用“0”表示“不变”，即当天价格与前一天价格相同.

时段	价格变化																			
第1天到第20天	-	+	+	0	-	-	-	+	+	0	+	0	-	-	+	-	+	0	0	+
第21天到第40天	0	+	+	0	-	-	-	+	+	0	+	0	+	-	-	-	+	0	-	+

用频率估计概率.

（1）试估计该农产品价格“上涨”的概率；

（2）假设该农产品每天的价格变化是相互独立的．在未来的日子里任取4天，试估计该农产品价格在这4天中2天“上涨”、1天“下跌”、1天“不变”的概率；

（3）假设该农产品每天的价格变化只受前一天价格变化的影响．判断第41天该农产品价格“上涨”“下跌”和“不变”的概率估计值哪个最大．（结论不要求证明）

19. 已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$，$A$、$C$分别是$E$的上、下顶点，$B$，$D$分别是$E$的左、右顶点，$|AC|=4$.

（1）求E的方程；

（2）设P为第一象限内E上的动点，直线PD与直线BC交于点M，直线PA与直线$y=-2$交于点N．求证：$MN\parallel CD$.

20. 设函数$f(x)=x-x^3e^{ax+b}$，曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=-x+1$.

（1）求a,b的值；

（2）设函数$g(x)=f'(x)$，求$g(x)$的单调区间；

（3）求$f(x)$的极值点个数.

21. 已知数列$\{a_n\},\{b_n\}$的项数均为$m(m>2)$，且$a_n,b_n\in\{1,2,\cdots,m\}$，$\{a_n\},\{b_n\}$的前$n$项和分别为$A_n,B_n$，并规定$A_0=B_0=0$. 对于$k\in\{0,1,2,\cdots,m\}$，定义$r_k=max\{i\,|\,B_i\le A_k,i\in\{0,1,2,\cdots,m\}\}$，其中，$max\,M$表示数集$M$中最大的数.

（1）若$a_1=2,a_2=1,a_3=3,b_1=1,b_2=3,b_3=3$，求$r_0,r_1,r_2,r_3$的值；

（2）若$a_1\ge b_1$，且$2r_j\le r_{j+1}+r_{j-1},j=1,2,\cdots,m-1,$，求$r_n$；

（3）证明：存在$p,q,s,t\in\{0,1,2,\cdots,m\}$，满足$p>q,s>t$，使得$A_p+B_t=A_q+B_s$.