2024年高考全国1卷数学

单项选择题

1. 已知集合$A=\{x\mid -5<x^3<5\},B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则$A\cap B=$（　）

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{2,3\}$

C. $\{-3,-1,0\}$　　D. $\{-1,0,2\}$

2. 若$\frac{z}{z-1}=1+i$，则$z=$（　）

A. $-1-i$　　B. $-1+i$

C. $1-i$　　D. $1+i$

3. 已知向量$\vec{a}=(0,1),\vec{b}=(2,x)$，若$\vec{b}\perp(\vec{b}-4\vec{a})$，则$x=$（　）

A. -2　　B. -1

C. 1　　D. 2

4. 已知$\cos(\alpha+\beta)=m,\tan\alpha\tan\beta=2$，则$\cos(\alpha-\beta)=$（　）

A. $-3m$　　B. $-\frac{m}{3}$

C. $\frac{m}{3}$　　D. $3m$

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为$\sqrt{3}$，则圆锥的体积为（　）

A. $2\sqrt{3}\pi$　　B. $3\sqrt{3}\pi$

C. $6\sqrt{3}\pi$　　D. $9\sqrt{3}\pi$

6. 已知函数为

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a,x<0\\ e^x+\ln(x+1),x\geq 0\end{cases},$$

在R上单调递增，则a取值的范围是（　）

A. $(-\infty,0]$　　B. $[-1,0]$

C. $[-1,1]$　　D. $[0,+\infty)$

7. 当$x\in[0,2\pi]$时，曲线$y=\sin x$与$y=2\sin(3x-\frac{\pi}{6})$的交点个数为（　）

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8

8. 已知函数为$f(x)$的定义域为R，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当$x<3$时$f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是（　）

A. $f(10)>100$　　B. $f(20)>1000$

C. $f(10)<1000$　　D. $f(20)<10000$

多项选择题

9. 为了解推动出口后的亩收入（单位：万元）情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值$\overline{x}=2.1$，样本方差$s^2=0.01$，已知该种植区以往的亩收入X服从正态分布$N(1.8,0.1^2)$，假设推动出口后的亩收入Y服从正态分布$N(\overline{x},s^2)$，则（　）（若随机变量Z服从正态分布$N(u,\sigma^2)$，$P(Z<u+\sigma)\approx0.8413$）

A. $P(X>2)>0.2$

B. $P(X>2)<0.5$

C. $P(Y>2)>0.5$

D. $P(Y>2)<0.8$

10. 设函数$f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则（　）

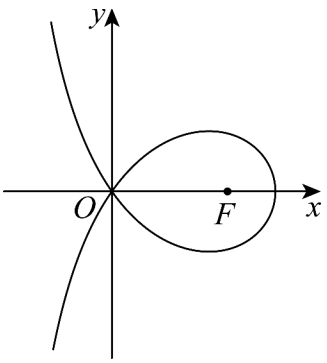
A. $x=3$是$f(x)$的极小值点

B. 当$0<x<1$时，$f(x)<f(x^2)$

C. 当$1<x<2$时，$-4<f(2x-1)<0$

D. 当$-1<x<0$时，$f(2-x)>f(x)$

11. 造型 ♑ 可以做成美丽的丝带，将其看作图中曲线 C 的一部分. 已知 C 过坐标原点 O. 且 C 上的点满足横坐标大于 -2，到点 $F(2,0)$ 的距离与到定直线 $x=a(a<0)$ 的距离之积为 4，则（　）



A. $a=-2$

B. 点 $(2\sqrt{2},0)$ 在 C 上

C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D. 当点 (x_0,y_0) 在 C 上时，$y_0\le\dfrac{4}{x_0+2}$

填空题

12. 设双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1、F_2，过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A，B 两点，若 $|F_1A|=13,|AB|=10$，则 C 的离心率为_____.

13. 若曲线 $y=e^x+x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线也是曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切线，则 a=_____.

14. 甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字 1，3，5，7，乙的卡片上分别标有数字 2，4，6，8，两人进行四轮比赛，在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上数字的大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片（弃置的卡片在此后的轮次中不能使用）. 则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为_____.

解答题

15. 记 $\triangle ABC$ 内角 A、B、C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$

（1）求 B;

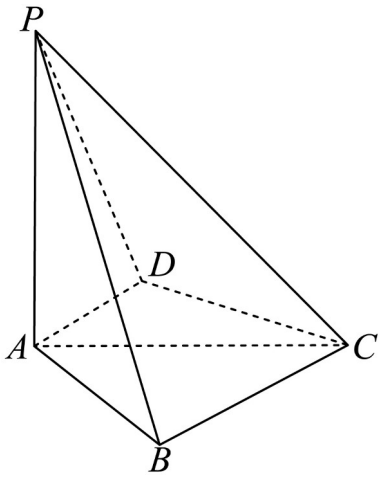
（2）若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3+\sqrt{3}$，求 c.

16. 已知$A(0,3)$和$P(3,\frac{3}{2})$为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上两点.

（1）求C的离心率;

（2）若过P的直线l交C于另一点B，且$\triangle ABP$的面积为9，求l的方程.

17. 如图，四棱锥$P-ABCD$中，$PA\perp$底面$ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1,AB=\sqrt{3}$.



（1）若$AD\perp PB$，证明：$AD\parallel$平面PBC;

（2）若$AD\perp DC$，且二面角$A-CP-D$的正弦值为$\frac{\sqrt{42}}{7}$，求AD.

18. 已知函数$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$

（1）若$b=0$，且$f'(x)\geq 0$，求a的最小值;

（2）证明：曲线$y=f(x)$是中心对称图形;

（3）若$f(x)>-2$当且仅当$1<x<2$，求b的取值范围.

19. 设m为正整数，数列$a_1,a_2,\ldots,a_{4m+2}$是公差不为0的等差数列，若从中删去两项a_i和$a_j(i<j)$后剩余的$4m$项可被平均分为m组，且每组的4个数都能构成等差数列，则称数列$a_1,a_2,\ldots,a_{4m+2}$是(i,j)-可分数列.

（1）写出所有的(i,j)，$1\leq i<j\leq 6$，使数列$a_1,a_2,\ldots,a_6$是(i,j)-可分数列;

（2）当$m\geq 3$时，证明：数列$a_1,a_2,\ldots,a_{4m+2}$是$(2,13)$-可分数列;

（3）从$1,2,\ldots,4m+2$中一次任取两个数i和$j(i<j)$，记数列$a_1,a_2,\ldots,a_{4m+2}$是(i,j)-可分数列的概率为P_m，证明：$P_m>\frac{1}{8}$.